

1 Compétences à acquérir

- ☐ Placer des complexes (forme algébrique ou exponentielle) dans le plan complexe.
- ☐ Lire l'axe (forme algébrique ou exponentielle) d'un point du plan.
- ☐ Mettre sous forme algébrique un quotient de complexes.
- ☐ Résoudre une équation linéaire dans $\mathbb{C}$. Résoudre une équation linéaire en z et $\bar{z}$.
- ☐ Résoudre des équations trigonométriques avec le cercle trigonométrique.
- ☐ Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle.
- ☐ Linéariser un produit de fonctions trigonométriques *via* les formules d'Euler.
- ☐ Extraire les racines carrées d'un complexe, avec la méthode la plus adaptée.
- ☐ Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels ou complexes.
- ☐ Extraire les racines n -ièmes d'un complexe sous forme exponentielle, pour un n petit. Cas simples.
- ☐ Lien entre multiplication et rotation.

2 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 1.

1. Placer dans le plan complexe les points A , B , C et D , d'affixes respectives $z_A = -1 + 2i$, $z_B = \bar{z}_A$, $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_D = -e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. A quoi correspond le nombre $|z_A - z_C|$?

Exercice 2. Mettre sous forme algébrique ($a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$) les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 3. Ecrire les nombres suivants sous forme polaire :

$$1+i, -1-i, -\sqrt{3}+i, 3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}, i.$$

Exercice 4. Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 5. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (1+i)z - iu &= 2+i \\ (2+i)z + (2-i)u &= 2i \end{cases}$$

Exercice 6. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 7. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes $e^{i\alpha}$ et $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$, où α et θ sont des réels.

Exercice 8. Déterminer a et b réels tels que $z = 1 + i$ soit solution de $z^5 + az^3 + b = 0$.

Exercice 9. Calculer $\left(\frac{1}{1+i}\right)^{2026}$

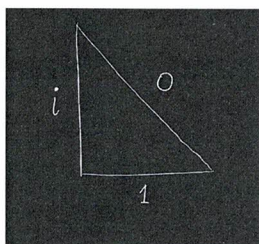
Exercice 10 (Amplitude et phase d'une oscillation). On considère un mouvement sinusoïdal

$$x(t) = 3 \cos(\omega t) + 4 \sin(\omega t).$$

1. Montrer que $x(t)$ peut s'écrire sous la forme $x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$. On introduira le signal complexe associé $\underline{x}(t) = A e^{i(\omega t - \varphi)}$ de sorte que $x(t) = \operatorname{Re}(\underline{x}(t))$.
2. Calculer numériquement A et φ (on pourra utiliser la calculatrice pour obtenir φ).

Exercice 11 (Argument et arctangente). On donne le nombre complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$.

1. Calculer le module $|z|$.
2. Un élève calcule $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)$ directement à la calculatrice. Que vaut cette valeur ? Est-ce le bon argument de z ? Justifier.
3. En déduire $\arg(z)$, puis écrire z sous forme exponentielle.



Dessin de Pythagore, perplexe.

3 Racines carrées, équation du second degré

La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du monde réel passe souvent par le domaine de l'imaginaire.

Exercice 12. Calculer les racines carrées de 1 , i , $3 + 4i$, $8 - 6i$, et $7 + 24i$.

Exercice 13.

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \quad ;$$

$$z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0 \quad ; \quad z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0 \quad ; \quad 4z^2 - 2z + 1 = 0 \quad ;$$

$$z^4 + 10z^2 + 169 = 0 \quad ; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $2\bar{z} + iz = \frac{1}{i} + 1 + 2i$

Exercice 16.

1. Pour a et b complexes, factoriser l'expression $a^2 + b^2$.
2. Soit $P(X) = \sum a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes. On appelle polynôme conjugué de P le polynôme $\bar{P} = \sum \bar{a}_k X^k$. Montrer que si α est une racine complexe d'un polynôme à coefficients complexes, alors $\bar{\alpha}$ est racine du polynôme conjugué.
3. Résoudre alors l'équation $(2z^2 - 3z + 2)^2 + (z^2 - 3z + 2)^2 = 0, z \in \mathbb{C}$.

Exercice 17. Résoudre $2z^3 - z = \bar{z}$.**Exercice 18.**

1. Démontrer que le complexe $z = 8 + 6i$ admet une racine carrée de la forme $a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$, avec $f(z) = iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1)$, sachant que x réel est solution.

4 Racine n -ième

Exercice 19. Calculer la somme $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$.**Exercice 20.**

1. Déterminer graphiquement (i.e., sans calcul) les racines carrées de $e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. Toujours graphiquement, déterminer les racines cubiques de $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 21.

1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, j, j^2$. Calculer $1 + j + j^2$ et en déduire les racines de $1 + z + z^2 = 0$.
2. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$. Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \dots + \varepsilon^{(n-1)p}$.

Exercice 22. Trouver les racines cubiques de $2 - 2i$, de $1 + i\sqrt{3}$, et de $11 + 2i$.**Exercice 23.**

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube. Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1 .
2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

(Indication : poser $Z = z^3$; calculer $(9 + i)^2$)

Exercice 24. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$
2. $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2 \cos \alpha$

5 Trigonométrie

Exercice 25. Soit z un nombre complexe de module ρ , d'argument θ , et soit $\bar{z}$ son conjugué. Calculer $(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^n + \bar{z}^n)$ en fonction de ρ et θ .

Exercice 26. En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Exercice 27. On donne $u = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$. Donner les formes algébrique et exponentielle de u , et retrouver les formules donnant $\cos 2\alpha$ et $\sin 2\alpha$.

Exercice 28. Linéariser les expressions suivantes :

1. $\cos^2(x) \sin^3(x)$
2. $\cos^4(\theta)$
3. $\cos^6(x) + \sin^6(x)$

6 Divers

Exercice 29. Rédiger une dissertation sur le thème : un nombre complexe l'est-il tant que ça ?

Exercice 30. Groupe cyclique Soit l'ensemble $C_4 = \{1, i, -1, -i\}$. Démontrer que C_4 forme un groupe pour la multiplication, c'est-à-dire qu'il vérifie les 4 axiomes suivants :

- $\forall g, g', g'' \in C_4, g(g'g'') = (gg')g''$ (associativité)
- $\forall g, g' \in C_4, gg' \in C_4$ (fermeture)
- $\exists! e \in C_4, \forall g \in C_4, ge = g = eg$ (existence d'un élément neutre)
- $\forall g \in C_4, \exists! g' \in C_4, gg' = 1 = g'g$ (existence d'un inverse)

Ce groupe est appelé groupe cyclique, et correspond notamment à des symétries de rotation d'un quart de tour.

Exercice 31.

1. Exprimer $\cos a \cos b$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
2. En effectuant un changement de variables à préciser, montrer que pour tous réels p et q , on a $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
3. Résoudre alors l'équation $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

Exercice 32. Onde évanescence.

Une onde électromagnétique dite évanescence peut être décrite de la manière suivante (à 1 dimension spatiale) : $E(x, t) = E_0 e^{-i(\omega t - kx)}$, où x, t représentent respectivement la position et le temps, $E_0 \in \mathbb{R}$ est l'amplitude, $\omega \in \mathbb{R}$ est la pulsation, et $k \in \mathbb{C}$ est le vecteur d'onde, que l'on peut écrire $k' + ik''$, avec k' et k'' des réels positifs. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x, t)$$

Exercice 33. Fractale : ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des points $c \in \mathbb{C}$ tels que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante soit bornée :

$$\begin{cases} z_{n+1} &= z_n^2 + c, n \in \mathbb{N} \\ z_0 &= 0. \end{cases}$$

Ecrire un programme (en langage Python par exemple) calculant, pour une valeur de c donnée, le terme z_{30} . Si $|z_{30}| < 2$, on place un point dans un repère au niveau de l'affixe de c . Recommencer cette opération pour différentes valeurs de c (Si on écrit $c = x + iy$, on pourra, par exemple, choisir des valeurs de x équidistantes entre -2 et 1, et des valeurs de y entre -1,5 et 1,5), et apprécier le spectacle.

Exercice 34. Soit un carré représenté dans le plan complexe par 4 sommets d'affixes $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2 + 2i$ et $z_4 = 2i$.

1. Placer ces quatre nombres dans le plan complexe.
2. On voudrait effectuer une rotation de 30° . Quelles sont les nouvelles affixes des sommets du carré ?
3. Ecrire un programme permettant d'effectuer une rotation quelconque.

7 English please !

Exercice 35. Let u and v be 2 complex numbers such that $|u| = |v| = 1$ and $uv \neq 1$. Show that the ratio $\frac{u+v}{1+uv}$ is real.

Exercice 36. Let $z = \frac{\lambda+4i}{1+\lambda i}$. Given that z is a real number, find the possible values of λ .

Exercice 37. It is given that $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Prove that $\frac{2}{1+z} = 1 - i \tan(\frac{\theta}{2})$.